

LOS NÚMEROS: UNA APROXIMACIÓN AL ENTENDIMIENTO DE LOS ABSOLUTOS.

Por Margarita María Niño Torres

En las carreras de matemáticas se enseña siempre algo sobre la llamada "*Hipótesis del continuo*", que fue formulada por Cantor en el siglo 19; el estudio de la misma para la mayor parte de los estudiantes promedio de tales carreras es algo como un dogma que se aprende pero que no se puede pensar. Los estudiantes generalmente comprenden a grandes rasgos el enunciado y saben repetirlo, pero cuando intentan acercarse a los infinitos involucrados...

Enuncio a continuación la problemática (al menos la mía), pero antes de hacerlo y entrar en una descripción simple de esta hipótesis, me permito unas explicaciones básicas:

Primero: Llamamos '*cardinal*' de un conjunto al número de elementos de ese conjunto.

Segundo: El invento de los números cardinales surgió naturalmente en el desarrollo de la civilización porque el hombre primitivo tuvo necesidad de hacer algún tipo de conteo de los grupos de seres o de cosas que le eran importantes. Por eso se llama ordinariamente '*naturales*' a estos números y comienzan en el *uno (1)*, porque eso de contar elementos en donde no hay elementos, lo que da lugar al cero, fue muy posterior.

(Como nota curiosa, fue un poeta árabe en el siglo X de nuestra era, Omar Kayyam, que también fue matemático, quien introdujo el Cero como un número, dentro del sistema ya muy avanzado de los números reales.)

Entonces, examinemos el conjunto de los números naturales como si fuéramos unos ojos invisibles que recorren lo que pudo ser el desarrollo del pensamiento numérico de nuestros antepasados de las primeras generaciones humanas:

- a) Dar nombre al hecho repetido de tener una cosa en la mano o a la vista. Llamar por su nuevo nombre a eso: decir *un árbol*, *una* cabra, *un* niño... el número **uno**.
- b) Dar nombre al hecho de repetir dos veces la palabra que designa una cosa, cuando se van señalando dos cosas. ... el número **dos**.

Así continuó la humanidad, construyendo nombres y luego símbolos para los cardinales más usuales, que suponemos de forma completamente arbitraria (*lo que estoy diciendo*), pudo llegar en el primer milenio... hasta el diez, en donde algunos pueblos

decidieron que las dos manos serían el símbolo perfecto para tal número.

Al fin, después de esas oscuridades de la historia y la antropología, el hombre se hizo capaz de contar cualquier agrupación de seres o cosas. Entonces tenemos conformado el conjunto de los números naturales. En los últimos siglos, muy sofisticados, hemos establecido una notación rigurosa para describir cualquier conjunto, y así, podemos arrancar esta charla que quiere llegar a un umbral lejano de los Absolutos, de la descripción siguiente:

$$\textit{Conjunto de los números naturales} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Sabemos que los elementos que forman este conjunto son cardinales. Esto significa que cada uno de ellos cuenta o describe cuántos elementos tiene un conjunto de cosas; entonces, surge la pregunta: *¿cuántos elementos tiene el conjunto de los números naturales?* y la respuesta se torna difícil. Rápidamente llegamos a que puede ser muy grande ese número, porque siempre que llegamos hasta uno de ellos, podemos añadir el que sigue, y no hay cuándo acabar de contarlos.

Y aquí el hombre, este pequeñísimo ser personal de este mundo también pequeño, inventó la palabra *"Infinito"*, tremendamente emparentada con el asombro, con la visión de lo creado, con la imaginación de la obra de un Creador que tiene que haber sido infinito con anterioridad a la creación. Así la mente del hombre se puso en el camino de conceptualizar ideas que van más allá de lo concreto. Ya tenemos, pues, un infinito por donde empezar a caminar lentamente hacia nuestro objetivo de rasguñar de alguna manera los conceptos que describen al Dios Eterno.

Veamos las cosas que se pueden hacer con este infinito de los números naturales, aunque antes, permítaseme otra digresión; es importante tener los términos frescos:

Decimos que el conjunto de los dedos de una mano tiene el mismo cardinal que el conjunto de las vocales de nuestro idioma, porque podemos establecer una relación en los dos sentidos: a cada dedo asignamos una vocal y a cada vocal un dedo, sin que sobren ni falten ni dedos ni vocales. A esto lo llamamos "correspondencia biunívoca". Y siempre que entre dos conjuntos se puede establecer una correspondencia biunívoca, esos dos conjuntos tienen el mismo número de elementos, o sea el mismo cardinal. En nuestro ejemplo: el número CINCO es el cardinal del conjunto de los dedos de una mano y también es el cardinal del conjunto de las letras vocales del idioma español.

Si partimos el conjunto de las vocales entre tú y yo y tú eliges las llenas y yo las débiles,

¿a quién le tocan más vocales? ... pues a quien se llevó las llenas que son $\{a,e,o\}$. En el de las débiles solamente quedaron $\{i,u\}$. Así al partir el conjunto, se formaron dos conjuntos que tienen menos elementos que el inicial y al sumar sus cardinales, vuelve a darnos el cardinal del conjunto inicial: $3+2=5$.

Volvamos a nuestro infinito: Imaginemos que nos vamos a repartir los elementos del conjunto de los naturales entre tú y yo. Tú dices: “Me quedo con todos los números impares de ese conjunto. Yo digo, pues me quedo con los números pares.” ¿Quién tiene ahora más números? Cuando intentamos escribir los elementos de nuestros conjuntos, tenemos:

Impares: $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

Pares: $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

Naturales $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Y resulta que ambos son infinitos, y que cada uno tiene tantos elementos como el conjunto de los naturales: lo vemos al escribir en orden, uno debajo del otro los tres conjuntos: rápidamente encontramos los números que se corresponden y así, por mucho que nos alarguemos en uno de ellos, siempre se obtendrán los números correspondientes en los otros dos. De esta forma vemos claramente que las reglas del infinito son diferentes: *el total no siempre es mayor que la parte; la parte puede ser igual en número de elementos, al total*. De un conjunto infinito inicial se puede extraer un conjunto infinito de tal forma que el conjunto inicial de donde se extrajo esa parte sigue siendo infinito y ambos, el que se extrajo y el que queda, son cada uno igualmente tan infinitos como el conjunto inicial.

Ahora hagamos un recuento de lo que tenemos y continuemos nuestros pasos en busca de la comprensión:

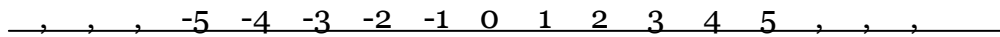
1. Empezamos por los números naturales que son los números que inventó el hombre para contar: $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ y es fácil ver que el cardinal (el número de elementos) de este conjunto es infinito, aunque crece solo para un lado, pues por grande que sea el último que hayamos escrito, siempre habrá un natural siguiente.

Sabemos también que si los elementos de dos conjuntos se pueden poner en correspondencia biunívoca, esto significa que a cada elemento de cualquiera de esos conjuntos

le corresponde uno y solo un elemento del otro conjunto, entonces los dos conjuntos tienen el mismo número de elementos.

2. Pasemos al conjunto de los enteros, $\{\dots-5,-4,-3,-2,-1, 0, 1,2,3,4,5,\dots\}$ que, además de los números que se incluyen en los naturales, tiene el Cero y los negativos u opuestos de los naturales; entonces, si aplicamos a este nuevo infinito lo que pasa con conjuntos finitos, diríamos que este infinito es el doble más 1 que el de los naturales; por nuestra experiencia anterior sospechamos que NO ES ASÍ: Resulta que se pueden poner en correspondencia biunívoca perfecta los elementos de los dos conjuntos, (es fácil establecer esa correspondencia, puedes intentarlo cuando quieras practicar tu conocimiento de conjuntos...) lo que nos lleva a la conclusión siguiente: *el cardinal del conjunto de los números enteros es el mismo cardinal del conjunto de los números naturales*. Cantor llamó a este cardinal el *Aleph Cero*.

3. Por otra parte, el hombre conoció la línea recta y llegó a ser capaz de trazarla: sin duda como resultado de sus esfuerzos por levantar un techo, por tender un puente, por tantos y tantos quehaceres que exigen un trazo recto. Hoy podemos usar aquí la recta para poner sobre ella los números enteros: es la llamada recta numérica:



4. Seguimos con el conjunto de los números RACIONALES, que incluye todas las fracciones, además de los enteros, y resulta que también se puede poner en correspondencia biunívoca con el de los naturales. *(Un número pertenece al conjunto de los Racionales si y solamente si, ese número se puede expresar de manera exacta como una fracción de dos enteros: quiere decir si se puede escribir como quebrado positivo o negativo. Es importante ver que cualquier número entero se puede expresar como una fracción: basta poner como denominador el número 1)*

Aquí se complica mucho todo, porque los racionales tienen una nueva propiedad llamada *densidad* que los hace tremendamente invasivos: en todas partes aparecen: aunque quisiéramos escoger un pedazo muy, muy chiquitito de la recta numérica, siempre hay más de dos racionales allí y, dado que entre dos racionales siempre hay otro racional, entonces ese

pedazo tan chiquitito de la recta tiene siempre infinito número de racionales. Con todo esto, se demuestra fácilmente, (de veras, cualquier adolescente interesado lo puede entender) que el número total de racionales es exactamente el mismo que el número de naturales, aunque los naturales quedan sumergidos en los racionales y hay muchísimos racionales que no son ni naturales ni enteros. Todos estos tres conjuntos tienen el mismo cardinal: el Aleph Cero.

En forma similar se puede demostrar que si se unen dos o más conjuntos de los cuales al menos uno es infinito, cuyos elementos sean todos racionales, el conjunto resultante sigue teniendo el mismo número de elementos que el conjunto de los naturales: Aleph Cero.

5. Aparecen luego otros números que no son racionales: los IRRACIONALES, aquéllos que *NO se pueden escribir como cociente de dos enteros*: (si a, b , son enteros, siendo b diferente de cero, el quebrado a/b es un racional, es igual al cociente de los enteros a y b . Si un número que aparece en alguna operación es tal que no es posible encontrar dos enteros como a , y b del ejemplo, tal número es IRRACIONAL). El conjunto formado por los irracionales, al cual pertenecen, como ejemplos entre otros, *la raíz cuadrada de 2, el número PI, el logaritmo decimal de 7,...* etc, no contiene ningún racional, no seno es posible encontrar ninguna forma de acomodar sus elementos para poderlos contar, por tanto, evidentemente no se pueden poner en correspondencia biunívoca con los naturales ni con los racionales, pero de hecho existen y muchos de ellos resultan de operaciones posibles y sencillas como trazar la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1 y tratar de medirla exactamente con las mismas unidades; como encontrar el resultado exacto de la división de la longitud de una circunferencia por la longitud de su diámetro... etc. Cantor demostró que al unir los racionales con los irracionales, resulta un conjunto cuyo cardinal es estrictamente mayor que Aleph Cero. Es el conjunto de los números *NÚMEROS REALES y su cardinal es llamado "CONTINUO"*

6. Al intentar poner los reales en la recta numérica, oh, sorpresa!, (todavía lo siento así, y me asombro, como cuando comenzaba mi carrera, aunque hayan pasado más de cincuenta años desde entonces) ésta, la recta, el espacio geométrico inventado por el hombre por otros motivos y necesidades, se llena totalmente, de forma que cada punto corresponde a un número real, y cada número real tiene un único punto de la recta para ubicarse. Entonces el cardinal de los reales es exactamente igual al cardinal de los puntos de la recta: por eso se llama a este cardinal *"EL CONTINUO"*. Al llegar aquí dejamos de pensar; es imposible

imaginar esos infinitos, los cerebros más talentosos en estos campos avanzan sin duda a niveles superiores de entendimiento pero no lo hacen en facilidad de expresar esos más altos niveles y los demás, terminamos aceptándolos y nuestra mente, con el tiempo, de alguna manera se aproxima a la comprensión.

Sé que el propio Cantor demostró que el cardinal de los enteros, al cual llamó Aleph Cero, es estrictamente menor que el cardinal de los Reales, llamado "continuo". Tanto el *Aleph Cero* como el *continuo* son infinitos. La hipótesis formulada por Cantor dice textualmente: *“no existen conjuntos cuyo cardinal sea estrictamente mayor que el cardinal de los enteros y estrictamente menor que el cardinal de los reales”*. El resto es historia que encuentras fácilmente.

7. En mis palabras, que son rústicas, expresaré las consideraciones que me llevan desde la definición del "*continuo*" y de las propiedades básicas del *Aleph Cero*, a algo así como una lejana comprensión de los Absolutos: el de la Deidad, el Indeterminado y el Universal, según aparecen descritos en el prólogo del Libro de Urantia.

En el Prólogo leemos:

14,4 El Absoluto de la Deidad es ese potencial que fue disgregado de la realidad total e infinita, mediante la libertad de elección del Padre Universal, y en el que tiene lugar toda la actividad -existencial y vivencial- de la divinidad. Este es el Absoluto Determinado en contraposición al Absoluto Indeterminado; pero el Absoluto Universal se sobreañade a los dos englobando todo el potencial del absoluto.

Si consideramos nuestra recta numérica como la realidad total e infinita cuyo número de puntos es el "continuo", podemos imaginar al Padre Universal como el Origen único de tal realidad, separando de ella una parte, igualmente infinita, para que en esa parte tuviera ubicación todo lo que en el pasado, presente y futuro tiene relación existencial o vivencial con Él. A esa parte de ese infinito 'continuo' lo llamamos el Absoluto de Deidad, permaneciendo el resto como Absoluto Indeterminado. Sin embargo, cuando el primer pensamiento del Padre en esa insondable eternidad de eternidades se convirtió en el Hijo Eterno, surgió la Isla del Paraíso, y concomitantemente, cuando Padre e Hijo unieron sus pensamientos y el Espíritu Infinito hizo su aparición y se formó el universo central perfecto. Ellos, los seres personales igualmente eternos, infinitos, absolutos, llenaron el Absoluto de la Deidad, mientras que las

obras externas, La Isla de Paraíso y el Universo Central permanecieron en el Absoluto Indeterminado. Esta situación creó una tensión entre los Absolutos, tensión que fue resuelta por la acción del Absoluto Universal, que tendió un puente para relacionar los otros dos absolutos, sin convertirlos en uno solo, sino manteniéndolos claramente diferenciados: *“pero el Absoluto Universal se sobreañade a los dos englobando todo el potencial del absoluto”*(14,4).

El concepto de Absoluto encierra mucho más que nuestro concepto humano del infinito del “continuo”. Si en este infinito que está próximo a nuestra comprensión sucede que cada segmento que contenga más de un punto de la recta es tan infinito y tan continuo como la recta completa, y que si retiramos uno, o mil, o más, de estos segmentos, la recta continúa siendo igualmente infinita y continua, y si esto lo aceptamos, es claro que no tendremos ninguna dificultad en aceptar que del Padre Infinito, Eterno, Absoluto, pueden desprenderse miles, miríadas de fracciones igualmente eternas e infinitas que bajen a morar en las mentes pequeñas y finitas de nosotros, los seres personales más pequeños, criaturas volitivas, dotadas de mente con potencial de espiritualidad.

.....

Estas ideas fueron para mí un motivo muy especial de ánimo y de fe. Ahora que las veo escritas veo su limitación y me doy cuenta de que alguien mejor preparado en el tema matemático, puede hacer una descripción mucho más clara y bella. Pero esto es lo que yo puedo comunicar, y deseo hacerlo.

La autora